

EXERCICE N°1

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 4|x - 1|$

1°) Dresser le tableau de variations de f .

2°) Tracer C_f , courbe représentative de f dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

EXERCICE N°2

On considère la fonction numérique à variable réelle f définie par :

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$. On désigne par (ζf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan

1°) Etudier les variations de f ; déterminer l'axe de symétrie, étudier les branches infinies.

2°) Trouver l'équation de droite D tangente à (ζf) au point d'abscisse 3.

3°) Etudier la position relative de (ζf) et D .

4°) Déterminer une équation de (ζf) dans le repère (S, \vec{i}, \vec{j}) où $S(2, 2)$

5°) Soit M le point de (ζf) d'abscisse a ; soit P le projeté orthogonal de M sur la droite des ordonnées et Q le projeté orthogonal de M sur la droite des abscisses.

Déterminer a pour que le quadrilatère $OQMP$ soit un carré.

Montrer que dans ce cas le point M appartient à une droite particulière qu'on précisera.

EXERCICE N°2

Soit la fonction : $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$; On désigne par (ζf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

$R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

1°) Etudier f .

2°) Montrer que $I(0, 1)$ est un centre de symétrie de (ζf)

3°) Ecrire l'équation de tangente D à la courbe (ζf) en point I .

4°) Etudier la position relative de D et (ζf)

5°) Tracer (ζf)

6°) Soit l'équation $(E_m) : 8x^3 - 6x + m = 0$. Utiliser la courbe (ζf) pour déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation (E_m) admet dans \mathbb{R} , 3 solutions distincts deux à deux.

7°) Utiliser la courbe (ζf) pour construire la courbe (ζh) de la fonction $h(x) = -4|x|^3 + 3|x| + 1$.

4°) Montrer que toutes les courbes ζ_m sont tangentes au point d'abscisse 1.

EXERCICE N°3

Soit la fonction définie par : $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$

1°) Etudier la fonction f et construire ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°) Soit D_m la droite du plan d'équation $y = 2x + m$ où m est un paramètre réel.

a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, ζ et D_m se coupent en deux points M et N (sans calculer ses coordonnées)

b) Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ est constante lorsque m varie..

3°) Soit le point $A(1, 2)$. Calculer en fonction de m le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$.

En déduire m pour que le triangle MAN soit rectangle en A .

4°) Déterminer une équation de (ζf) dans le repère (S, \vec{i}, \vec{j}) où $S(-2, -1)$

EXERCICE N°4

On considère la fonction $f : x \rightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ et on désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthogonale (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2°) Etudier la dérivabilité de f à droite en 3 et à gauche en 1.

Interpréter graphiquement les résultats.

3°) Soit Δ la droite d'équation $x = 2$. Montrer que Δ est axe de symétrie de ζ .

4°) Etudier f .

5°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 2)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x - 2)$. Interpréter graphiquement les résultats.

6°) Tracer ζ



7°) En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(|x|)$

8°) Soit la fonction $g = -f$. On désigne par ζ' sa courbe représentative dans un repère orthogonale (O, \vec{i}, \vec{j}) . Tracer ζ' dans le même repère.

9°) Vérifier que $\zeta \cup \zeta'$ a pour équation $x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0$.

10°) On considère les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$ et $\Omega(2, 0)$

- Déterminer une équation de $\Gamma = \zeta \cup \zeta'$ dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$
- Conclure.

EXERCICE N°5

Partie A

Déterminer les réels a, b, c et d vérifiant :

♥ La représentation graphique ζ_f de f définie par : $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$ admet une asymptote d'équation $x=2$.

♥ ζ_f n'admet pas d'asymptote horizontale.

♥ ζ_f passe $A(1, 0)$ et en ce point la tangente a pour coefficient directeur -3

Partie B

On pose $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$.

1°) a- Dresser le tableau de variation de g .

b- Déterminer trois réels a', b' et c' tel que pour tout x de D_g on a : $g(x) = a'x + b' + \frac{c'}{x-2}$.

c- En déduire une équation cartésienne de l'asymptote oblique Δ .

d- Tracer ζ_g dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

2°) a- Montrer que $I(2, 5)$ est un centre de symétrie de ζ_g .

b- Soit \vec{u} un vecteur directeur de l'asymptote Δ et \vec{v} un vecteur directeur de l'asymptote parallèle à la droite des ordonnées. Donner une équation cartésienne de ζ_g dans le repère $R' = (I, \vec{u}, \vec{v})$

3°) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de :

$$\begin{cases} x^2 + (1-m)x - 2(1-m) = 0 \\ -2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

4°) Déduire de ζ_g la construction de ζ_h où $h(x) = \frac{x^2 + |x| - 2}{|x| - 2}$.

C) Soit m un réel non nul on considère les fonctions f_m définies par : $f_m(x) = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 2}$ On note (ζ_m) la courbe représentative de f_m dans le plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Montrer que toutes les courbes (ζ_m) passent par un seul point fixe A dont on donnera les coordonnées.

2°) Montrer que la droite $\Delta_m : y = \frac{1}{m}x + 1 + \frac{2}{m^2}$ est une asymptote à (ζ_m) .

3°) Étudier, suivant les valeurs de m , les variations de f_m .

4°) a- Montrer que $I_m\left(\frac{1}{m}, 1 + \frac{2}{m^2}\right)$ est un centre de symétrie pour (ζ_m) .

b- Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie sur \mathbb{R}^* .

EXERCICE N°6

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = x^2(x+2)$

1°) Étudier les variations de g sur $[0, +\infty[$

2°) Démontrer que l'équation $g(x) = 4$ admet, sur $[0, +\infty[$, une unique solution a dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} .

3°) En déduire la résolution de l'inéquation : $g(x) > 4$ sur $[0, +\infty[$.

Partie B :



Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} + x$ et (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1°) Étudier la parité de f .

2°) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, et en déduire $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Interpréter graphiquement les résultats.

3°) Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (ζ_f) en $+\infty$, en déduire l'équation d'une droite asymptote à (ζ_f) en $-\infty$.

4°) a) Démontrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et que $f'(x) = \frac{\sqrt{g(x^2)-2}}{x^2\sqrt{x^2+2}}$

b) Déduire de la partie A que $f'(x) > 0$ sur $]\sqrt{a}, +\infty[$

c) Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R}^*

5°) Déterminer une équation de la tangente (T) à (ζ_f) au point d'abscisse $\sqrt{2}$

6°) Tracer la courbe (ζ_f) .

EXERCICE N°7

Partie A

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^4 - 4x - 3$

1°) Étudier les variations de g .

2°) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur \mathbb{R} telles que : $\alpha < 0 < \beta$.

b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α et de β .

c) Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x .

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$

1°) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) a) Déterminer les réels a, b, c, d et e tels que pour tout $x \neq 1$: $f(x) = ax + b + \frac{cx^2 + dx + e}{x^3 - 1}$

b) En déduire que la courbe C_f représentative de f admet une asymptote oblique que l'on indiquera.

c) Préciser la position de C_f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3°) a) Démontrer que $f'(x) = \frac{x^2 g(x)}{(x^3 - 1)^2}$

b) En déduire les variations de f .

4°) En utilisant les encadrements de la partie A, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ et de $f(\beta)$.

5°) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 .

6°) Dresser le tableau de variation complet de f et tracer C_f dans un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm)

