SEMAINE DES SUITES REELLES

7 EXERCICES-NIVEAU 4EME MATHS

Un exercice chaque jours

Exercice n°ß

On considère la suite U définie par $U_0 = 1$ *et* $\forall n \in N :\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 2}{U_n + 2}$

1. *Montrer que pour tout n de N* : $1 \le U_n < \sqrt{2}$.
2. *Etudier la monotonie de U.*
3. *Montrer que U est convergente et calculer sa limite.*
4. *Montrer que pour tout n de N* : $\sqrt{2} - U_{n+1} \le \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} - U_n\right)$
5. *En déduire que pour tout n de N* ; $\sqrt{2} - U_n \le \dfrac{1}{2^{n+1}}$. *Retrouver* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$
6. *Soit pour tout n de N** : $S_n = \dfrac{1}{n}\left(U^2{}_1 + U^2{}_2 + \dots + U^2{}_n\right) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} U^2{}_k$.
   a. *Montrer que* (S_n) *est croissante.*
   b. *Soient n et p deux entiers naturels tel que* $n > p > 1$.

      Montrer que : $(p-1)S_{p-1} + (n-p+1)U_p^2 \le nS_n \le nU_n^2$
   c. *En déduire que* (S_n) *est convergente (on note* $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$)
   d. *Montrer que pour tout p >1* : $U_p^2 \le \ell \le 2$. *En déduire la valeur de* ℓ .

Correction d'exercice n°ß

1. *Montrons par récurrence que pour tout n de N*: $1 \le U_n < \sqrt{2}$

-Pour n=0, on a $1 \le U_0 = 1 < \sqrt{2}$

-Soit n un entier naturel . Supposons que $1 \le U_n < \sqrt{2}$. *Montrons que* $1 \le U_{n+1} < \sqrt{2}$

On a $U_{n+1} - 1 = \dfrac{U_n}{U_n + 2}$, *or* $U_n \ge 1 > 0$ *alors* $U_{n+1} - 1 \ge 0$

D'autre part $U_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)U_n + \left(2 - 2\sqrt{2}\right)}{U_n + 2} = \dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(U_n - \sqrt{2}\right)}{U_n + 2}$

Or $U_n < \sqrt{2}$, $U_n + 2 > 0$ *et* $2 - \sqrt{2} > 0$ *alors* $U_{n+1} < \sqrt{2}$

Conclusion : *Pour tout n de N*: $1 \le U_n < \sqrt{2}$

2. Pour tout n de N : $U_{n+1}-U_n=\dfrac{2U_n+2}{U_n+2}-U_n=\dfrac{2-U_n^{\ 2}}{U_n+2}$

Or $1\le U_n<\sqrt{2}$ alors $U_n^{\ 2}<2$ donc $U_{n+1}-U_n\ge 0$

Conclusion U est croissante.

3. On a U est croissante et majoré par $\sqrt{2}$ alors U est convergente

On note ℓ sa limite.

On a pour tout n de N : $1\le U_n<\sqrt{2}$ alors $\ell\in\left[1,\sqrt{2}\right]$

On a $U_{n+1}=f(U_n)$ avec $f(x)=\dfrac{2x+2}{x+2}$

f est continue sur $R-\{-2\}$ en particulier en $\left[1,\sqrt{2}\right]$ et (U_n) est convergente vers $\ell\in\left[1,\sqrt{2}\right]$

Alors $\ell=f(\ell)$ donc $\ell=\sqrt{2}$ ou $\ell=-\sqrt{2}$ or $\ell\in\left[1,\sqrt{2}\right]$ donc $\ell=\sqrt{2}$

4. Pour tout n de N : $\sqrt{2}-U_{n+1}=\dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-U_n\right)}{U_n+2}$

On a $U_n\ge 1$ alors $\dfrac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{U_n+2}\le\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}$

Or $\sqrt{2}\ge 1$ alors $\dfrac{2-\sqrt{2}}{3}\le\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2}$ donc $\sqrt{2}-U_{n+1}\le\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-U_n\right)$

5. Montrons par récurrence que pour tout n de N : $\sqrt{2}-U_n\le\dfrac{1}{2^{n+1}}$

-Pour $n=0$, on a $\sqrt{2}-U_0=\sqrt{2}-1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\le\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2^{0+1}}$

-Soit n un entier naturel . Supposons que $\sqrt{2}-U_n\le\dfrac{1}{2^{n+1}}$. Montrons que $\sqrt{2}-U_{n+1}\le\dfrac{1}{2^{n+2}}$

On a $\sqrt{2}-U_{n+1}\le\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-U_n\right)\le\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2^{n+1}}$

Conclusion : Pour tout n de N : $\sqrt{2}-U_n\le\dfrac{1}{2^{n+1}}$

On a $0<\sqrt{2}-U_n\le\dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}=0$ (suite géométrique de raison $-1<\dfrac{1}{2}<1$)

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}-U_n\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\sqrt{2}$

6. *Soit pour tout n de N* :* $S_n = \frac{1}{n}\left(U^2{}_1 + U^2{}_2 + \ldots + U^2{}_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U^2{}_k$.

a. $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}\left(\underbrace{U^2{}_1 + U^2{}_2 + \ldots + U^2{}_n}_{nS_n} + U_{n+1}{}^2\right) - S_n$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}\left(U_{n+1}{}^2 - S_n\right)$$

$$Or \begin{cases} U_1{}^2 \le U_{n+1}{}^2 \\ U_2{}^2 \le U_{n+1}{}^2 \\ \vdots \\ U_n{}^2 \le U_{n+1}{}^2 \end{cases} \quad alors \ \sum_{k=1}^{n} U_k{}^2 \le nU_{n+1}{}^2 \ \ donc \ \ S_n \le U_{n+1}{}^2 \ ainsi \ S_{n+1} \ge S_n$$

Dons (S_n) *est croissante.*

b. *Pour tous n et p deux entiers naturels tel que* $n > p > 1$, *on a :*

$$nS_n = U_1{}^2 + U_2{}^2 + \cdots + U_{p-1}{}^2 + U_p{}^2 + \cdots + U_n{}^2$$

$$nS_n = \overbrace{U_1{}^2 + U_2{}^2 + \cdots + U_{p-1}{}^2}^{(p-1)S_{p-1}} + U_p{}^2 + \cdots + U_n{}^2 = (p-1)S_{p-1} + U_p{}^2 + \cdots + U_n{}^2$$

$$Or \begin{cases} U_p{}^2 \ge U_p{}^2 \\ U_{p+1}{}^2 \ge U_p{}^2 \\ \vdots \\ U_n{}^2 \ge U_p{}^2 \end{cases} \quad alors \ \ U_p{}^2 + \cdots + U_n{}^2 \ge (n-p+1)U_p{}^2$$

$$alors \ \ (p-1)S_{p-1} + (n-p+1)U_p^2 \le nS_n \le nU_n^2$$

$$D'autre\ part \begin{cases} U_1{}^2 \le U_n{}^2 \\ U_2{}^2 \le U_n{}^2 \\ \vdots \\ U_n{}^2 \le U_n{}^2 \end{cases} \quad alors \ \sum_{k=1}^{n} U_k{}^2 \le nU_n{}^2 \ \ donc \ \ S_n \le U_n{}^2$$

Conclusion : Pour tous n et p deux entiers naturels tel que $n > p > 1$.

On a : $(p-1)S_{p-1} + (n-p+1)U_p^2 \le nS_n \le nU_n^2$

c. *On a pour tout entier naturel n :* $S_n \le U_n{}^2 \le \sqrt{2}^2 = 2$

On a S est croissante et majoré par 2 alors S est convergente

d. *On a, pour tous n et p deux entiers naturels tel que* $n > p > 1$.

On a : $(p-1)S_{p-1} + (n-p+1)U_p^2 \leq nS_n \leq nU_n^2$

Alors $\frac{p-1}{n}S_{p-1} + \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)U_p^2 \leq S_n \leq U_n^2$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{p-1}{n}S_{p-1} + \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)U_p^2 = 0 \times S_{p-1} + (1-0)U_p{}^2 = U_p{}^2$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n{}^2 = \sqrt{2}^2 = 2$

Alors $\underline{U_p{}^2 \leq \ell \leq 2}$

Par passage à limite lorsque $\underline{p \to +\infty}$

On obtient $\lim\limits_{p \to +\infty} U_p{}^2 \leq \ell \leq 2$ *Alors* $\underline{2 \leq \ell \leq 2}$ *donc* $\underline{\ell = 2}$

Pour aller plus loin

Soit pour tout n de N^* :

$$\mathrm{P}_n = U_1 \times U_2 + U_2 \times U_3 + \cdots + U_n \times U_{n+1} = \sum_{k=1}^{k=n} U_k U_{k+1}$$

Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{P}_n}{n}$.