

L'espace est muni d'une repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Produit scalaire dans l'espace.

Définition

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs et les point O, M, N tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$.

On appelle produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini comme suit :

- ♦ Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- ♦ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(A\hat{O}B)$

Conséquence

- 1°) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$ où H est le projeté orthogonal de B sur (OA) .
- 2°) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- 3°) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
- 4) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Propriétés :

Soit \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs et a et b deux réels.

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \ \vec{u}\ ^2$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$	$(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \cdot \vec{v})$
$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$		$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 + \ \vec{u} - \vec{v}\ ^2 = 2(\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2)$		$\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Déterminant

Soit $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base

Pour tout vecteur \vec{u} , il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$M(x, y, z) \rightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$

On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base B , et on note $\det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$ le réel :

$$a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$$

Produit vectoriel dans l'espace.

Définition :

Soit $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$ deux vecteurs .

On appelle produit vectoriel de \vec{u} par \vec{v} , le vecteur défini comme suite :

- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires alors :
 - i. $\vec{u} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{v} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}$.
 - ii. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base direct.



iii. $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin(\widehat{BAC})$

Conséquences et propriétés

$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$	$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, si et seulement si, \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires	
$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC}) \vec{k}$ où \vec{k} unitaire et normale au plan (ABC)	$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$	$a\vec{u} \wedge b\vec{v} = ab(\vec{u} \wedge \vec{v})$
$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{w} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{v} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$	$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$	
Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \vec{k}$		

Propriétés

Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} des vecteurs de l'espace.

L'aire du parallélogramme ABCD est égale à : $\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\ $	L'aire du triangle ABD est égale à : $\frac{1}{2} \ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\ $
Le volume d'un tétraèdre ABCD est égale à : $\frac{1}{6} (\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA} $	Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égale à : $ (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE} = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$
La distance d'un point M de l'espace à la droite $\Delta(A, \vec{u})$ est le réel : $d(M, \Delta) = \frac{\ \overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\ }{\ \vec{u}\ } = \frac{\ \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\ }{\ \overrightarrow{AB}\ }$ avec $B \in \Delta$	

Droites et plans de l'espace

Soit $A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

Droite:

L'ensemble des points M tels que \overrightarrow{AM} et \vec{u} soient colinéaires est une droite, appelé droite passant par A et de vecteur directeur \vec{u} .

$D(A, \vec{u}) = \{M \in \mathcal{E} / \exists \alpha \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}\}$

• $D(A, \vec{u}) // D(B, \vec{v})$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Représentation paramétrique : $D(A, \vec{u}) : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$

Plan:

Dans le cas où \vec{u} et \vec{v} non colinéaires:

L'ensemble des points M tels que \overrightarrow{AM} soit combinaison linéaire de \vec{u} et \vec{v} , est un plan, appelé plan passant par A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} .

$P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in \mathcal{E} / \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}\}$

• $D(A, \vec{u}) // P(B, \vec{v}, \vec{w})$ si et seulement si la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

• $P(A, \vec{u}, \vec{v}) // Q(B, \vec{u}', \vec{v}')$ si et seulement si les familles $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'\}$ et $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}'\}$ sont liées.

Représentation paramétrique : $P(A, \vec{u}, \vec{v}) : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \beta a' \\ y = y_0 + \lambda b + \beta b' \\ z = z_0 + \lambda c + \beta c' \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$



Equation cartésienne d'un plan

$P : ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

*) Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est le vecteur normale à P .

*) Le vecteur $\vec{x} \begin{pmatrix} a \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur de P si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$

Position relatives

Soit $D(A, \vec{u})$, $D'(A', \vec{u}')$, $P : ax + by + cz + d = 0$ et $P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

Leur vecteurs normaux \vec{n} et \vec{n}'

*) $D \perp D'$ si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{u}'$

*) $D // D'$ si et seulement si $\vec{u} // \vec{u}'$

*) $P \perp P'$ si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{n}'$

*) $P // P'$ si et seulement si $\vec{n} // \vec{n}'$

*) $P \perp D$ si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{n}'$

*) $P // D$ si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{u}$

La sphère

Etant donné un point I de ζ et un réel R strictement positif. On appelle sphère de centre I et de rayon R , et on note $\zeta_{(I,R)}$ l'ensemble des points M de ζ tels que : $IM = R$.

Autre définition : Soit la sphère ζ de diamètre $[AB]$. $M \in \zeta \Leftrightarrow \vec{MA} \perp \vec{MB}$

Equation cartésienne d'un sphère : $\zeta_{(I(a,b,c),R)} : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Réciproquement :

Soit $E = \{M(x, y, z) \in \zeta / x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0\}$

On pose $h = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d$

Si $h < 0$ alors $E = \emptyset$	Si $h = 0$ alors $E = \left\{ I\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) \right\}$	Si $h > 0$ alors $E = \zeta_{(I, \sqrt{h})}$
----------------------------------	---	--

Intersection d'une sphère et d'un plan.

Soit ζ une sphère de centre I et de rayon R . Soient P un plan, H le projeté orthogonal de I sur P et $d = (I, P)$.

Si $d > R$ alors $P \cap \zeta = \emptyset$, on dit que P et ζ sont extérieurs.

Si $d = R$ alors $P \cap \zeta = \{H\}$, on dit que P et ζ sont tangents.

Si $0 < d < R$ alors $P \cap \zeta$ est le cercle de P de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$, on dit que P et ζ sont sécants.

