

LIMITES

Soient P et Q deux fonctions polynôme de degré n et m et du monôme de plus haut degré $a_n x^n$ et $b_m x^m$ respectivement alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n ; \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x^4 + x - 1}{x^2 + 5x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty$

Limites trigonométries

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} = \frac{a^2}{2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x} = 0$$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \cdot \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos(x)}{x^2}}{\frac{\sin(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos(x)}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Théorème d'encadrement

Soit f , g et h trois fonctions telles que :

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} g = l \quad (l \in \mathbb{R}) \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} h = l \text{ (} x_0 \text{ fini ou infini)}$$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

On a : $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ alors pour tout $x > 0$: $-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$

Alors on a : $\begin{cases} -x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \text{ pour } x \text{ voisin de } 0 \\ \lim_{0^+} (-x) = \lim_{0^+} x = 0 \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Théorème de comparaison

Soit f et g deux fonctions telles que :

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \geq g(x) \text{ pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g = +\infty \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$$

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \leq g(x) \text{ pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g = -\infty \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} f = -\infty \text{ (} x_0 \text{ fini ou infini)}$$

Exemple : Soit $f(x) = x^2 \cdot (2 + \cos(x))$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

On a : $2 + \cos x \geq 2 + -1$ alors $2 + \cos x \geq 1$ ainsi $f(x) \geq x^2$

On a alors $\begin{cases} f(x) \geq x^2 \text{ pour } x \text{ voisin de } x_0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{cases} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Théorème : fonction composé

Soit f et g deux fonctions telles que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f = y \text{ et } \lim_y g = z \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f = z \text{ (} x_0, y \text{ et } z \text{ finis ou infinis)}$$

Exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1 + \pi x}{2x}\right)$

On peut écrire $h = g \circ f$ avec $f : x \mapsto \frac{1 + \pi x}{2x}$ et $g \mapsto \sin(x)$ et $h(x) = \sin\left(\frac{1 + \pi x}{2x}\right)$



On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \pi x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$
 et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$

Théorème

- *) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- *) les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R} .
- *) les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition c'est à dire en tout point où le dénominateur ne s'annule pas.
- *) Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0

Théorème :

- *) Soit f une fonction f définie sur un intervalle de type $[a, b[$ (b finie ou infini)
 Si la fonction f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b .
 Si la fonction f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b .
- *) Soit f une fonction f définie sur un intervalle de type $]a, b]$ (a finie ou infini)
 Si la fonction f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en a .
 Si la fonction f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en a .

Théorème de la valeur intermédiaire

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, alors pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet aux moins une solution $\alpha \in [a, b]$.

Corollaire 1 de TVI

Si f est continue sur $I = [a, b]$ et telle que $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins un réel $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$.
 Et si de plus f est strictement monotone sur I alors il existe un unique réel $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$.

Corollaire 2 de TVI

Si f est continue sur $I = [a, b]$ et ne s'annule pas alors elle garde un signe constante sur I

Exemple : $I = [1, 2]$ et $f(x) = x^3 + x - 3$

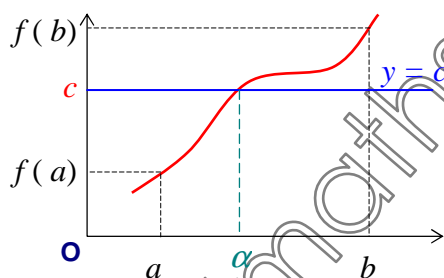
f est dérivable sur I et on a : $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

$f(1) = -1$ et $f(2) = 7$

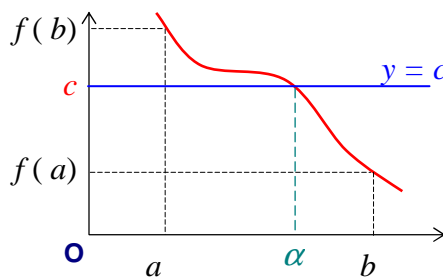
Alors on a : f est continue sur I , $f(1) \times f(2) < 0$ et f est strictement croissante sur I

Alors il existe un unique réel $x_0 \in]1, 2[$ tel que $f(x_0) = 0$.

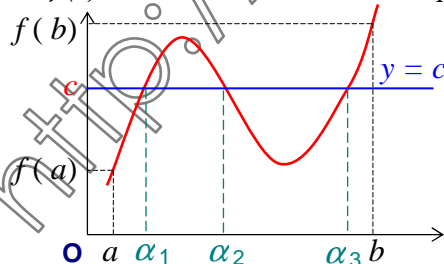
Illustrations graphiques



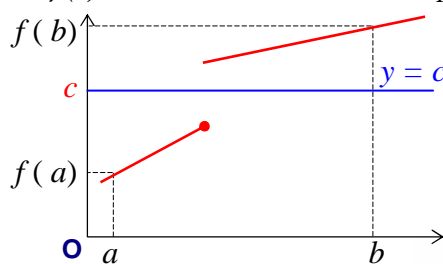
f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a ; b]$.
 L'équation $f(x) = c$ admet une solution unique.



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a ; b]$.
 L'équation $f(x) = c$ admet une solution unique.



f est continue mais n'est pas monotone sur l'intervalle $[a ; b]$.
 L'équation $f(x) = c$ peut avoir plusieurs solutions



f n'est pas continue sur l'intervalle $[a ; b]$.
 L'équation $f(x) = c$ peut ne pas avoir de solutions

